

Vermeld op elk vel papier je **naam** en **studentnummer**.
Geef ook de naam van je docent op het 1^e blad.

cijfer = $\sum \text{punten} / 2 + 1$
(per vraag 6 punten)

Geef steeds grootheden met hun fouten op een correcte wijze afgerond weer en laat duidelijk zien welke formules je gebruikt bij de berekeningen.

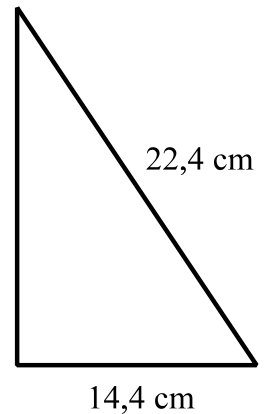
1. Verdelingsfunctie

Gegeven is de functie $f(x)$ met $f(x) = \begin{cases} A \cdot x \cdot e^{-x^2} & \text{voor } x \geq 0 \\ 0 & \text{voor } x < 0 \end{cases}$

- [1] a. Bereken de waarde van A opdat $f(x)$ een kans verdelingsfunctie wordt.
- [2] b. Bereken het gemiddelde van x .
- [3] c. Bereken de standaarddeviatie σ .

Gegeven is dat: $\int x e^{-x^2} dx = [-\frac{1}{2} e^{-x^2}]$; $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi}$ en $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$

- 2. Van een rechthoekige driehoek is de schuine zijde $(22,4 \pm 0,3)$ cm lang. Eén van de rechthoekszijden heeft een lengte van $(14,4 \pm 0,2)$ cm.



- [3] a. Bereken de omtrek O van de driehoek en de fout hierin.

Twee andere metingen van de omtrek leveren de volgende waarden op:

$O_1 = (55,6 \pm 0,5)$ cm en $O_2 = (54,0 \pm 0,7)$ cm

- [3] b. Bereken van deze laatste twee metingen het gewogen gemiddelde met de fout daarin.

3. Wereldrecords 10000 m schaatsen voor mannen

In onderstaande tabel zijn zeven wereldrecords 10000 m schaatsen voor mannen weergegeven vanaf 29 maart 1980. De data zijn omgerekend in het aantal dagen na 29 maart 1980 terwijl de tijden zijn berekend in (honderdste) seconden.

datum			tijd				
dag	maand	jaar	aantal dagen D_i	minuten	seconden	0,01 s	tijd T_i in
			na 29 maart 1980				seconden
29	3	1980	0	14	26	71	866,71
31	1	1982	673	14	23	59	863,59
15	2	1987	2514	14	3	92	843,92
10	2	1991	3970	13	43	54	823,54
20	2	1994	5076	13	30	55	810,55
17	2	1998	6534	13	15	3	795,03
19	3	2006	9486	12	51	60	771,60

- [2] a. Maak een geschikte grafiek van de records (in seconden) als functie van de datum (in dagen na 29 maart 1980) en constateer dat er een lineaire relatie blijkt te bestaan.
- [3] b. Bereken met behulp van de kleinste kwadraten methode de afname van de recordtijd in seconden per jaar. Laat zien welke formules je gebruikt hebt; leidt eventueel deze formules af.
- [1] c. Op 11 februari 2007 (9815 dagen na 29 maart 1980) reed Sven Kramer een nieuw wereld record: 12 minuten en 49,88 seconden. Hoeveel seconden wijkt dit, op grond van de kleinste kwadraten methode, af van de verwachte tijd?

Uitwerkingen

1a. Normeren: $A \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{A}{2} e^{-x^2} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{2} = 1$ zodat $A = 2$

b. $\langle x \rangle = 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

c. $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 2 \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx - \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} \pi \rightarrow \sigma = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \pi} \approx 0,46$

2a. De omtrek is: $O = a + c + \sqrt{c^2 - a^2} = 14,4 + 22,4 + \sqrt{22,4^2 - 14,4^2} = 54,0 \text{ cm}$

$$\sigma_O^2 = \left(\frac{\partial O}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial O}{\partial c} \Delta c\right)^2 = \left[\left(1 + \frac{a}{\sqrt{c^2 - a^2}}\right) \Delta a\right]^2 + \left[\left(1 + \frac{c}{\sqrt{c^2 - a^2}}\right) \Delta c\right]^2 = 0,614$$

dus $\sigma_O = 0,8 \text{ cm}$

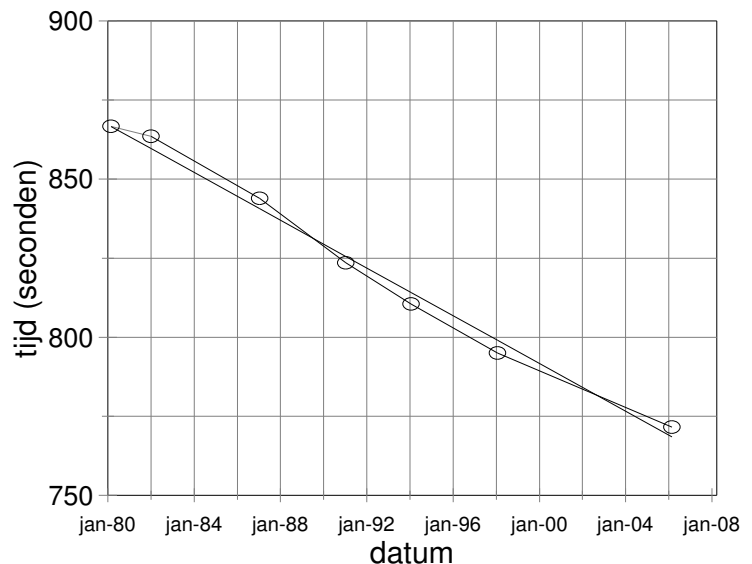
De omtrek is derhalve: $O = 54,0 \pm 0,8 \text{ cm}$

b. Het gewogen gemiddelde is: $\langle O \rangle = \frac{O_1 \cdot \frac{1}{\sigma_1^2} + O_2 \cdot \frac{1}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} = 55,07$

Voor de fout in het gemiddelde geldt: $\frac{1}{\sigma_{\langle O \rangle}^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} = 6,04$ dus $\sigma_{\langle O \rangle} = 0,4$

Het gewogen gemiddelde is dus: $\langle O \rangle = 55,1 \pm 0,4 \text{ cm}$

3a.



b. De som van de kwadraten is:

$$M(a,b) = \sum_1^4 (T_i - a \cdot D_i - b)^2$$

Uit $\frac{\partial M}{\partial a} = 0$ en $\frac{\partial M}{\partial b} = 0$ volgt:

$$a = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{3228677 - 4036,143 \cdot 824,9914}{25853879 - 4036,143^2} = -0,01057 \text{ s/dag} = -3,859 \text{ s/jaar}$$

c. De verwachte tijd is: $866,71 - \frac{3,859}{365} \cdot 9815 = 762,94$ seconden,

de gerealiseerde tijd van Sven Kramer is: **769,88** seconden; dus een verschil van bijna **7 s**.